Tangenti a una circonferenza

Una retta rispetto a una circonferenza può essere esterna, tangente o secante a seconda che abbia 0, 1, 2 punti di intersezione con la curva.

Per determinare gli eventuali punti di intersezione occorre risolvere il sistema formato dalle equazioni di retta e circonferenza.

Esercizi

1)

r) $y = x + 3$ $\qquad$ γ) $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x + 3 \\ x^2 + (x+3)^2 - 4x - 4(x+3) = 0 \end{cases}$$

2

$$\begin{cases} y = x+3 \\ x^2 + x^2 + 6x + 9 - 4x - 4x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x+3 \\ 2x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \longrightarrow \Delta = b^2 - 4ac =$$

$$= 4 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) =$$

$$= 4 + 24 = 28 > 0$$

Ci sono 2 soluzioni, quindi 2 punti di intersezione e la retta è secante la circonferenza.

2)

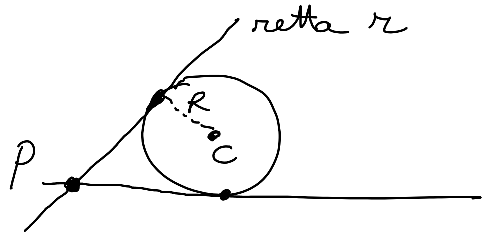
$$\begin{cases} x+3=0 \\ x^2+y^2+2x-4y+1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ 9+y^2-6-4y+1=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-3 \\ y^2-4y+4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-3 \\ (y-2)^2=0 \end{cases}, \quad \Delta = 0$$

Una sola soluzione, la retta è tangente.

Determinazione delle tangenti a una circonferenza passanti per un punto

Se la retta è tangente la sua distanza dal centro della circonferenza deve essere uguale al raggio.



In alternativa si può usare come condizione la proprietà delle tangenti di avere un solo punto di intersezione con la circonferenza.

Se il punto P appartiene alla circonferenza si possono usare le formule di sdoppiamento.

Esercizi

1) $\gamma)\ x^2+y^2+2x-2y-8=0$, $P(2,2)$

In questo caso il punto P appartiene alla circonferenza.

Con le formule di sdoppiamento si effettuano le sostituzioni

$$x^2 \longrightarrow x x_0,\quad y^2 \longrightarrow y y_0,\quad x \longrightarrow \frac{x+x_0}{2},\quad y \longrightarrow \frac{y+y_0}{2}$$

$$2x+2y+\cancel{2}\cdot\frac{x+2}{\cancel{4}}-\cancel{2}\cdot\frac{y+2}{\cancel{4}}-8=0$$

$$2x+2y+x+\cancel{2}-y-\cancel{2}-8=0$$

$$3x+y-8=0, \quad \boxed{y=-3x+8}$$

2)

γ) $x^2+y^2-8x-2y+12=0$, $P(1,0)$

Il centro è $C(4,1)$, il raggio

$$r=\sqrt{x_c^2+y_c^2-c}=\sqrt{16+1-12}=\sqrt{5}$$

Il fascio di rette di centro P ha equazione $y=m(x-1)$.

La distanza della retta tangente dal centro della circonferenza deve essere uguale al raggio:

$$d=\frac{|1-m(4-1)|}{\sqrt{1+m^2}}=\sqrt{5}$$

Elevando al quadrato:

$$(1-3m)^2=5(1+m^2)$$

$$1 + 9m^2 - 6m = 5 + 5m^2$$

$$4m^2 - 6m - 4 = 0$$

$$2m^2 - 3m - 2 = 0$$

$$m = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Le due rette tangenti hanno equazione

$y = 2(x - 1)$ e $y = -\frac{1}{2}(x - 1)$ oppure

$y = 2x - 2$ e $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

Soluzione alternativa

Si può risolvere il problema anche usando la condizione che le tangenti hanno una sola intersezione con la circonferenza

$\gamma)$ $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$, $P(1, 0)$

Mettendo a sistema l'equazione del fascio di rette con l'equazione della circonferenza deve aversi $\Delta = 0$.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0 \\ y = m(x - 1) \end{cases}$$

6

$$x^2+m^2(x-1)^2-8x-2m(x-1)+12=0$$

$$x^2+m^2x^2+m^2-2m^2x-8x-2mx+2m+12=0$$

$$x^2(1+m^2)-2x(m^2+4+m)+m^2+2m+12=0$$

$$\frac{\Delta}{4}=\frac{b^2-4ac}{4}=\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac=$$

$$=(m^2+m+4)^2-(1+m^2)(m^2+2m+12)=0$$

$$\cancel{m^4}+\cancel{m^2}+16+\cancel{2m^3}+8m^2+8m-\cancel{m^2}-2m-12+$$
$$-\cancel{m^4}-\cancel{2m^3}-12m^2=0$$

$$-4m^2+6m+4=0\ ,\quad 2m^2-3m-2=0$$

che è la stessa equazione già trovata usando l'altra condizione.